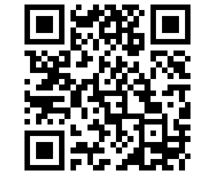
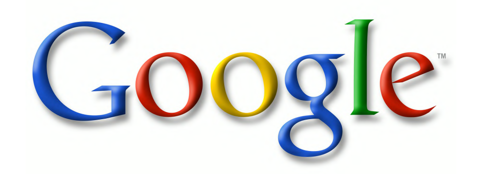
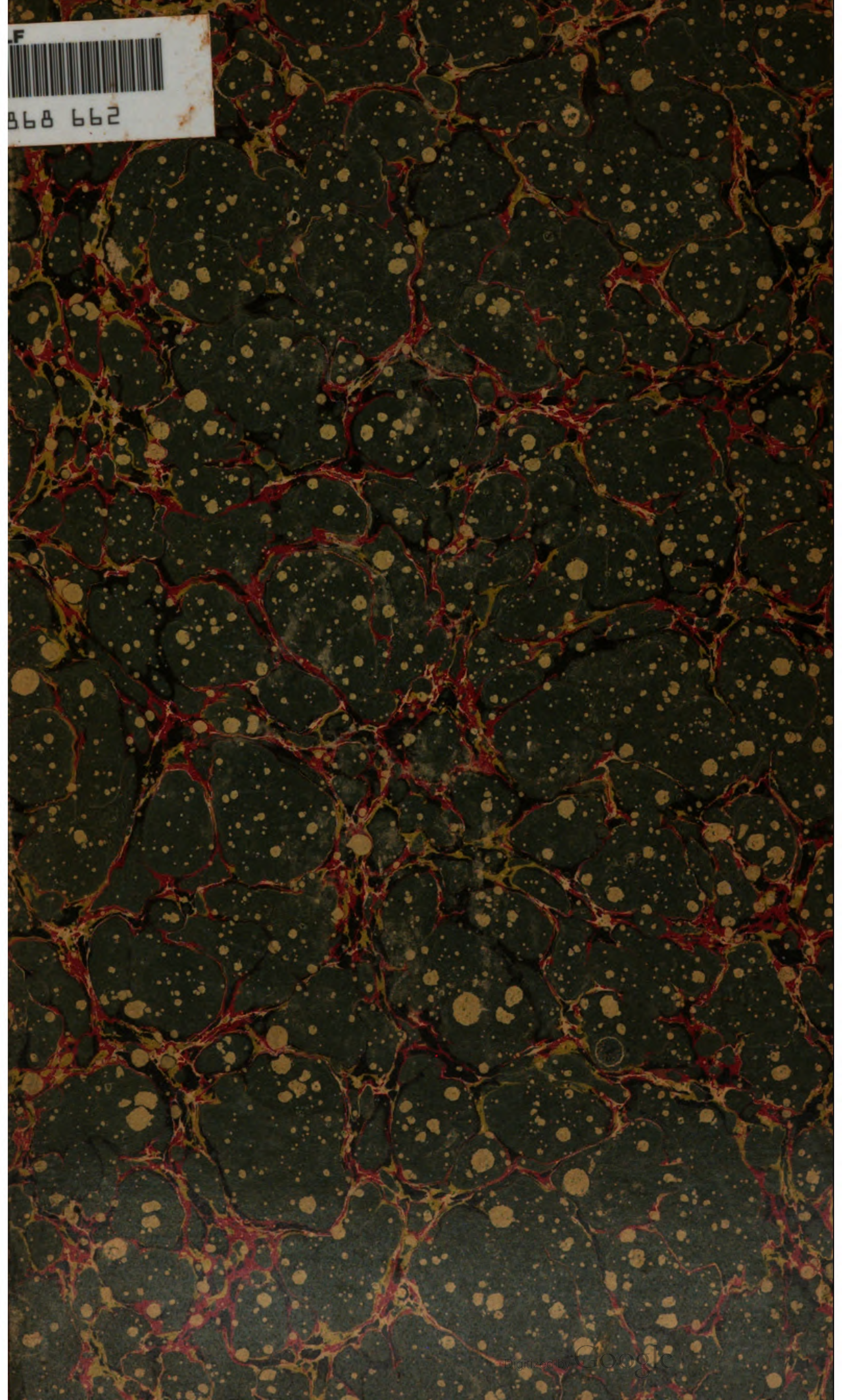






Ueber unendlich kleine Schwingungen einer inkompressiblen kugelförmigen Flüssigkeitsmasse, deren einzelne Teilchen sich nach dem Newton'schen Gravitationsgesetze anziehen.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

der

Hohen Philosophischen Facultät der Universität Marburg

eingereicht von

Georg Kniess,

aus Frankfurt a. M.

MARBURG.

C. L. Pfeil'sche Universitäts-Buchdruckerei.

1888.



Seinem hochverehrten Lehrer

Herrn Professor Dr. H. Weber

in dankbarer Ergebenheit

gewidmet

vom Verfasser.

Die einzelnen Teilchen einer aus einer inkompressiblen Flüssigkeitsmasse bestehenden Kugel vom Radius $\mathfrak{R}$, die nicht der Schwere unterworfen ist, sollen sich nach dem Newton'schen Gesetze anziehen. Es soll die Flüssigkeit in unendlich kleine Schwingungen versetzt und deren Differential- und Integralgleichungen aufgestellt werden.

1. Aufstellung der Differentialgleichungen.

Die hydrodynamischen Gleichungen von Lagrange und Euler lassen sich in den allgemeinsten Fällen nicht integrieren. Um aber in einem besonderen Falle eine Integration derselben zu ermöglichen, muss man entweder sehr spezielle Annahmen machen, oder man bedient sich sehr vorteilhaft des Unendlichkleinen. Dieser letztere Weg soll auch in der Entwicklung des vorliegenden Problems eingeschlagen werden.

Geht man von den Lagrange'schen Differentialgleichungen aus

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}\dfrac{\partial x}{\partial a}+\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}\dfrac{\partial y}{\partial a}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}\dfrac{\partial z}{\partial a}=\dfrac{\partial(V-\Pi)}{\partial a} \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}\dfrac{\partial x}{\partial b}+\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}\dfrac{\partial y}{\partial b}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}\dfrac{\partial z}{\partial b}=\dfrac{\partial(V-\Pi)}{\partial b} \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}\dfrac{\partial x}{\partial c}+\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}\dfrac{\partial y}{\partial c}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}\dfrac{\partial z}{\partial c}=\dfrac{\partial(V-\Pi)}{\partial c} \end{cases}$$

(worin Π den Quotient aus Druck und Dichtigkeit und V das Potential der wirkenden Kräfte bezeichnet, was ja auch in dem vorliegenden Falle in der That existiert, da sich die einzelnen Teilchen der Flüssigkeit nach dem Newton'schen Gesetze anziehen) und setzt darin

$$(2)\quad \begin{cases} x=a+\xi \\ y=b+\eta \\ z=c+\zeta \end{cases}$$

wo $\xi\ \eta\ \zeta$ unendlich kleine Grössen erster Ordnung bedeuten, so gehen die Gleichungen (1) durch diese Substitution über in

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \dfrac{\partial(V-\Pi)}{\partial a} \\ \dfrac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = \dfrac{\partial(V-\Pi)}{\partial b} \\ \dfrac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = \dfrac{\partial(V-\Pi)}{\partial c} \end{cases}$$

wobei aber unendlich kleine Grössen 2. Ordnung vernachlässigt worden sind. Ebenso vereinfacht sich die Kontinuitätsgleichung sehr wesentlich, indem sie sich nur auf

$$(4)\qquad \frac{\partial\xi}{\partial a} + \frac{\partial\eta}{\partial b} + \frac{\partial\zeta}{\partial c} = 0$$

reduziert. Differentiert man nun die Gleichungen (3) bezüglich nach a, b, c und Gleichung (4) zweimal nach t, so erhält man durch Vergleichung der beiden alsdann entstehenden Gleichungen

$$\frac{\partial^2(V-\Pi)}{\partial a^2} + \frac{\partial^2(V-\Pi)}{\partial b^2} + \frac{\partial^2(V-\Pi)}{\partial c^2} = 0$$

und hieraus direkt, wenn man allgemein

$$\frac{\partial^2 G}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial c^2} = \Delta G$$

setzt, die Relation

$$(5)\qquad \Delta(V-\Pi) = \Delta V - \Delta\Pi = 0$$

Hierin ist aber

$$\Pi = \frac{p}{s}$$

wo p den Druck und s die Dichtigkeit bezeichnet. Da aber im Fall einer inkompressiblen Flüssigkeit die Dichtigkeit konstant ist und ohne der Allgemeinheit zu schaden gleich 1 gesetzt werden kann, so geht Gleichung (5) über in

$$(6)\qquad \Delta V - \Delta p = 0$$

Streng genommen hätte man nun für V in jedem Augenblick das Pontential der Flüssigkeitsmasse in Bezug auf den betrachteten Punkt aufzustellen. Macht man aber zunächst die Ueberlegung, dass di

Schwingungen im Verhältnis zum Radius der Kugel unendlich klein sind, also die jedesmalige Form der Flüssigkeitsmasse nur unendlich wenig von der Kugelgestalt (Laplace'sches Sphäroid Fig. I.) abweichen wird, so kann man auch ohne weiteren Fehler obiges Potential durch das der Kugel auf einen ihrer Punkte ersetzen. In diesem Falle wäre alsdann

$$V = 2\varepsilon\pi(\mathfrak{R}^2 - r^2)$$

worin $\mathfrak{R}$ den Radius der Kugel, r die Entfernung des betrachteten Punktes vom Mittelpunkt der Kugel und ε das Produkt aus der Dichtigkeit und der Stärke der Anziehung in der Einheit der Entfernung bedeutet. Geht man nun aber in dieser Betrachtung noch weiter und erwägt, dass die schwingende Bewegung sich nur äusserst wenig in das Innere der Flüssigkeitsmasse übertragen wird, also nur auf eine sehr dünne Oberflächenschicht beschränkt bleiben wird, so kann man auch annehmen, dass die Anziehung der alsdann annähernd unbewegt bleibenden Flüssigkeitskugel auf einen Punkt P der schwingenden Schicht vom Mittelpunkt ausgehe. Unter dieser Annahme hat man alsdann

$$V = \frac{4}{3}\varepsilon\pi\mathfrak{R}^3\frac{1}{r}$$

zu setzen, wobei

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Mithin wird das Potential für einen unendlich benachbarten Punkt mit den Koordinaten $a + \xi$, $b + \eta$, $c + \zeta$

$$V = \frac{4}{3}\varepsilon\pi\mathfrak{R}^3\frac{1}{\sqrt{(a+\xi)^2 + (b+\eta)^2 + (c+\zeta)^2}}$$

Entwickelt man nun die Grösse

$$\frac{1}{\sqrt{(a+\xi)^2 + (b+\eta)^2 + (c+\zeta)^2}}$$

nach dem Mac-Laurin'schen Satz für Funktionen mit drei unabhängigen Variablen, nach welchem

$$F(x, y, z) = F(0, 0, 0) + xF'_x(0,0,0) + yF'_y(0, 0, 0) + zF'_z(0,0,0) + \dots\dots$$

und berücksichtigt nur die Glieder erster Potenz in ξ η ζ, so ergibt sich

$$\frac{1}{\sqrt{(a+\xi)^2+(b+\eta)^2+(c+\zeta)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}^{\,3}}(a\xi + b\eta + c\zeta)$$

Hierdurch geht das Potential V über in

(7) $$V = \frac{4}{3}\varepsilon\pi\Re^3\left\{\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}^{\,3}}(a\xi + b\eta + c\zeta)\right\}$$

Nimmt man an, dass an der Oberfläche der Flüssigkeit ein konstanter Druck P herrsche, und bildet die Funktion

$$F = V - p + P - \frac{4}{3}\varepsilon\pi\Re^2$$

$$= \frac{4}{3}\varepsilon\pi\Re^3\left\{\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}^{\,3}}(a\xi + b\eta + c\zeta)\right\}$$

$$- p + P - \frac{4}{3}\varepsilon\pi\Re^2$$

so geht diese Funktion F für die Oberfläche der Flüssigkeit, an welcher

$$p = P \text{ und } \sqrt{a^2+b^2+c^2} = \Re$$

über in

(9) $$\overline{F} = -\frac{4}{3}\varepsilon\pi(a\xi + b\eta + c\zeta)$$

wobei der horizontale Strich immer den Wert einer Funktion für die Oberfläche angeben soll. Aus Gleichung (6) und (8) ergibt sich für F die Bedingung

(10) $$\Delta F = 0$$

Differentiert man Gleichung (9) zweimal nach t, so resultiert die Relation

$$\frac{\overline{\partial^2 F}}{\partial t^2} = -\frac{4}{3}\varepsilon\pi\left(a\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} + b\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} + c\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}\right)$$

oder mit Berücksichtigung der Gleichungen (3)

(11) $$\frac{\overline{\partial^2 F}}{\partial t^2} = -\frac{4}{3}\varepsilon\pi\left(a\frac{\partial\overline{F}}{\partial a} + b\frac{\partial\overline{F}}{\partial b} + c\frac{\partial\overline{F}}{\partial c}\right)$$

2. Integration der Differentialgleichungen.

Da die hier auftretenden Differentialgleichungen linear sind, so kann man sich eine partikulare Lösung der Gleichungen (3) suchen, indem man F in zwei Faktoren zerlegt derart, dass

(12) $$F = U\,.\,\tau$$

wobei τ nur von der Zeit, U dagegen nur von den räumlichen Koordinaten abhängen soll. Durch diese Substitution geht Gleichung (10) über in

$$\Delta U = 0 \tag{13}$$

und Gleichung (11) in

$$\overline{U} \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} = - \frac{4}{3} \varepsilon \pi \tau \left(a \frac{\partial \overline{U}}{\partial a} + b \frac{\partial \overline{U}}{\partial b} + c \frac{\partial \overline{U}}{\partial c} \right)$$

oder mit $U\tau$ dividiert

$$\frac{1}{\tau} \frac{d^2 \tau}{dt^2} = - \frac{4}{3} \varepsilon \pi \frac{1}{\overline{U}} \left(a \frac{\overline{\partial U}}{\partial a} + b \frac{\overline{\partial U}}{\partial b} + c \frac{\overline{\partial U}}{\partial c} \right) \tag{14}$$

Da τ nur von t und U nur von a, b, c abhängt, so folgt aus der Form von Gleichung (14), da a, b, c und t von einander unabhängig sind, dass beide Seiten notwendiger Weise einer Konstanten etwa $-\varkappa^2$ gleich sein müssen. Hierbei ist zu beachten, dass die Konstante negativ sein muss, damit τ eine periodische Funktion der Zeit werde. Setzt man also

$$\frac{1}{\tau} \frac{d^2 \tau}{dt^2} = - \varkappa^2$$

$$\frac{d^2 \tau}{dt^2} = - \varkappa^2 \tau \tag{15}$$

so hat diese Differentialgleichung die beiden partikularen Lösungen

$$\tau_1 = \sin \varkappa t$$
$$\tau_2 = \cos \varkappa t$$

so dass also t die Periode

$$T = \frac{2\pi}{\varkappa} \tag{16}$$

hat. Aus diesen beiden partikularen Lösungen ergibt sich dann das allgemeine Integral

$$\tau = A \cos \frac{2\pi t}{T} + B \sin \frac{2\pi t}{T} \tag{17}$$

wo A und B in Bezug auf t konstant sind, wohl aber noch Funktionen U enthalten können und somit noch von a, b, c abhängen können.

Die aufgestellte Funktion U hat nunmehr den beiden Bedingungen zu genügen

$$\varDelta U = 0$$

und an der Oberfläche, wie aus Gleichung (14) hervorgeht

$$(18) \qquad \varkappa^2 \bar{U} = \frac{4}{3}\varepsilon\pi\left(a\frac{\partial \bar{U}}{\partial a} + b\frac{\partial \bar{U}}{\partial b} + c\frac{\partial \bar{U}}{\partial c}\right)$$

Um eine weitere Behandlung der Gleichungen (13) und (18) zu ermöglichen ist es zweckmässig, dieselben im Hinblick auf das vorliegende Problem auf Polarkoordinaten zu transformieren.

Transformation von $\varDelta U$.

Um den Ausdruck

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

auf Polarkoordinaten zu transformieren, setze man

$$\alpha \left\{ \begin{aligned} x &= r \sin\vartheta \cos\varphi \\ y &= r \sin\vartheta \sin\varphi \\ z &= r \cos\vartheta \end{aligned} \right.$$

woraus dann

$$\beta \left\{ \begin{aligned} dx &= \sin\vartheta \cos\varphi dr + r\cos\varphi\cos\vartheta d\vartheta - r\sin\vartheta\sin\varphi d\varphi \\ dy &= \sin\vartheta\sin\varphi dr + r\cos\vartheta\sin\varphi d\vartheta + r\sin\vartheta\cos\varphi d\varphi \\ dz &= \cos\vartheta dr - r\sin\vartheta d\vartheta \end{aligned} \right.$$

Durch Auflösen des Gleichungssystems β ergeben sich dann

$$\gamma \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \sin\vartheta\cos\varphi \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \sin\vartheta\sin\varphi \\ \frac{\partial r}{\partial z} &= \cos\vartheta \end{aligned} \right. \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} &= \frac{\cos\vartheta\cos\varphi}{r} \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial y} &= \frac{\cos\vartheta\sin\varphi}{r} \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial z} &= \frac{-\sin\vartheta}{r} \end{aligned} \right. \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{-\sin\varphi}{r\sin\vartheta} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{\cos\varphi}{r\sin\vartheta} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right.$$

Bildet man nun zunächst

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \vartheta}\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ &= \frac{\partial U}{\partial r}\sin\vartheta\cos\varphi + \frac{\partial U}{\partial \vartheta}\frac{\cos\vartheta\cos\varphi}{r} + \frac{\partial U}{\partial \varphi}\frac{-\sin\varphi}{r\sin\vartheta} = D_1 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \vartheta}\frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial U}{\partial r}\sin\vartheta\sin\varphi + \frac{\partial U}{\partial \vartheta}\frac{\cos\vartheta\sin\varphi}{r} + \frac{\partial U}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{r\sin\vartheta} = D_2$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial \vartheta}\frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial U}{\partial r}\cos\vartheta + \frac{\partial U}{\partial \vartheta}\frac{-\sin\vartheta}{r} = D_3$$

so erhält man durch nochmalige Differentiation nach resp. x, y, z

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial D_1}{\partial r}\sin\vartheta\cos\varphi + \frac{\partial D_1}{\partial \vartheta}\frac{\cos\vartheta\cos\varphi}{r} + \frac{\partial D_1}{\partial \varphi}\frac{-\sin\varphi}{r\sin\vartheta}$$

$$= \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\sin^2\vartheta\cos^2\varphi + \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2}\frac{\cos^2\varphi\cos^2\vartheta}{r^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\frac{\sin^2\varphi}{r^2\sin^2\vartheta}$$

$$+ \frac{\partial^2 U}{\partial r\partial \vartheta}\frac{2\sin\vartheta\cos\vartheta\cos^2\varphi}{r} - \frac{\partial^2 U}{\partial r\partial \varphi}\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r} - \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta\partial \varphi}\frac{2\sin\varphi\cos\varphi\cos\vartheta}{r^2\sin\vartheta}$$

$$+ \frac{\partial U}{\partial r}\frac{\cos^2\vartheta\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}{r} - \frac{\partial U}{\partial \vartheta}\frac{2\sin^2\vartheta\cos\vartheta\cos^2\varphi - \cos\vartheta\sin^2\varphi}{r^2\sin\vartheta}$$

$$+ \frac{\partial U}{\partial \varphi}\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r^2\sin^2\vartheta}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\partial D_2}{\partial r}\sin\vartheta\sin\varphi + \frac{\partial D_2}{\partial \vartheta}\frac{\cos\vartheta\sin\varphi}{r} + \frac{\partial D_2}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{r\sin\vartheta}$$

$$= \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\sin^2\vartheta\sin^2\varphi + \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2}\frac{\cos^2\vartheta\sin^2\varphi}{r^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\frac{\cos^2\varphi}{r^2\sin^2\vartheta}$$

$$+ \frac{\partial^2 U}{\partial r\partial \vartheta}\frac{2\sin\vartheta\cos\vartheta\sin^2\varphi}{r} + \frac{\partial^2 U}{\partial r\partial \varphi}\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r} + \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta\partial \varphi}\frac{2\sin\varphi\cos\varphi\cos\vartheta}{r^2\sin\vartheta}$$

$$+ \frac{\partial U}{\partial r}\frac{\cos^2\vartheta\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}{r} - \frac{\partial U}{\partial \vartheta}\frac{2\sin^2\vartheta\cos\vartheta\sin^2\varphi}{r^2\sin^2\vartheta} - \frac{\partial U}{\partial \varphi}\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r^2\sin^2\vartheta}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{\partial D_3}{\partial r}\cos\vartheta + \frac{\partial D_3}{\partial \vartheta}\frac{-\sin\vartheta}{r} + 0$$

$$= \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\cos^2\vartheta + \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2}\frac{\sin^2\vartheta}{r^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial r\partial \vartheta}\frac{2\sin\vartheta\cos\vartheta}{r}$$

$$+ \frac{\partial U}{\partial r}\frac{\sin^2\vartheta}{r} + \frac{\partial U}{\partial \vartheta}\frac{2\sin\vartheta\cos\vartheta}{r}$$

Durch Addition dieser drei Ausdrücke erhält man die gewünschte Relation

$$\Delta U = \frac{\partial\left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r}\right)}{r^2 \partial r} + \frac{\partial\left(\sin\vartheta \frac{\partial U}{\partial \vartheta}\right)}{r^2 \sin\vartheta \partial\vartheta} + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0$$

oder mit r^2 multipliziert

$$(19) \quad r^2 \Delta U = \frac{\partial\left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r}\right)}{\partial r} + \frac{\partial\left(\sin\vartheta \frac{\partial U}{\partial \vartheta}\right)}{\sin\vartheta \partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0$$

Transformation von $\left[a \frac{\partial U}{\partial a} + b \frac{\partial U}{\partial b} + c \frac{\partial U}{\partial c}\right]$

Um den Ausdruck

$$a \frac{\partial U}{\partial a} + b \frac{\partial U}{\partial b} + c \frac{\partial U}{\partial c}$$

wobei man ja an Stelle von a, b, c auch x, y, z schreiben kann, auf Polarkoordinaten zu transformieren, kann man denselben Weg einschlagen wie vorher bei der Transformation von ΔU. Das Resultat dieser Transformation lautet

$$a \frac{\partial U}{\partial a} + b \frac{\partial U}{\partial b} + c \frac{\partial U}{\partial c} = r \frac{\partial U}{\partial r}$$

Die Gleichungen (13) und (18) gehen also durch die Transformation auf Polarkoordinaten über in (19) und

$$\varkappa^2 \bar{U} = \frac{4}{3} \varepsilon \pi r \frac{\partial \bar{U}}{\partial r}$$

oder da diese Gleichung für die Oberfläche gilt, wo $r = \mathfrak{R}$

$$(20) \quad \varkappa^2 \bar{U} = \frac{4}{3} \varepsilon \pi \mathfrak{R} \frac{\partial \bar{U}}{\partial r}$$

Verfährt man nun mit der Funktion U ebenso wie vorher mit der Funktion F und macht die Zerlegung

$$(21) \quad U = RW$$

wo R nur von r, W dagegen nur von ϑ und φ abhängen soll, so geht Gleichung (19) über in

$$W\frac{d\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)}{dr}+R\left\{\frac{\partial\left(\sin\vartheta\frac{\partial W}{\partial\vartheta}\right)}{\sin\vartheta\partial\vartheta}+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2}\right\}=0$$

oder mit $R \,.\, W$ dividiert

$$\left[\frac{1}{R}\frac{d\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)}{dr}\right]+\left[\frac{1}{W}\left\{\frac{\partial\left(\sin\vartheta\frac{\partial W}{\partial\vartheta}\right)}{\sin\vartheta d\vartheta}+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2}\right\}\right]=0 \tag{22}$$

Hier lässt sich nun ebenso wie bei Gleichung (14) schliessen, dass jeder der eingeklammerten Bestandteile einer Konstanten und zwar entgegengesetzt gleich sein muss, so dass also zunächst

$$\frac{1}{R}\frac{d\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)}{dr}=\alpha$$

oder mit R multipliziert

$$\frac{d\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)}{dr}=\alpha R \tag{23}$$

Führt man die Differentiation auf der linken Seite aus, so erhält man

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2}+2r\frac{dR}{dr}=\alpha R$$

Der Bau dieser Gleichung, welche in Bezug auf r vollständig von gleicher Dimension ist, führt darauf der Gleichung durch eine Potenz von r zu genügen. Setzt man deshalb

$$R=r^n$$

so geht der Ausdruck $\frac{d\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)}{dr}$ über in

$$n(n+1)r^n$$

mithin Gleichung (23) in

$$n(n+1)r^n=\alpha r^n$$

woraus sich für n die Bestimmungsgleichung ergibt

$$n(n+1)=\alpha$$

Diese Gleichung in n hat aber die beiden Wurzeln

$$n \text{ und } -(n+1)$$

Gleichung (23) hat also die partikulären Lösungen

$$R_1 = Ar^n$$

$$R_2 = Br^{-(n+1)}$$

wo A und B zwei von r unabhängige Grössen bezeichnen, so dass also eine allgemeine Lösung die Form annähme

$$R = Ar^n + Br^{-(n+1)}$$

Die zweite dieser partikularen Lösungen wird indessen für $r = 0$ unendlich gross, und würde deshalb einer notwendig vorauszusetzenden Stetigkeit widersprechen. Es kann daher nur die erste der beiden Lösungen

$$R = Ar^n \tag{24}$$

im Weiteren in Betracht kommen. Substituiert man die Zerlegung (21) auch in Gleichung (20) so erhält man

$$\varkappa^2 \overline{RW} = \frac{4}{3} \varepsilon \pi \overline{\Re W} \frac{\overline{dR}}{dr}$$

oder mit W dividiert

$$\varkappa^2 \overline{R} = \frac{4}{3} \varepsilon \pi \Re \frac{\overline{dR}}{dr} \tag{25}$$

und hierin für R seinen Wert aus (24) eingesetzt

$$\varkappa^2 \overline{Ar^n} = \frac{4}{3} \varepsilon \pi A \Re n \overline{r}^{n-1}$$

oder, da diese Gleichung für die Oberfläche gilt,

$$\varkappa^2 A \Re^n = \frac{4}{3} \varepsilon \pi n A \Re^n$$

oder mit $A\Re^n$ dividiert

$$\varkappa^2 = \frac{4}{3} \varepsilon \pi n$$

also

$$\varkappa = 2 \sqrt{\frac{\varepsilon \pi n}{3}}$$

Hierbei ist noch zu bemerken, dass n eine ganze Zahl sein muss, da sonst von einem bestimmten Differentialquotienten an alle folgenden einen negativen Exponent erhalten und somit für $r=0$ unendlich würden. Aus dem Werte für $\varkappa$ ergibt sich dann mit Hülfe der Gleichung (16) die Schwingungszeit

$$(26) \qquad T_n = \frac{2\pi}{\varkappa} = \sqrt{\frac{3\pi}{\varepsilon n}}$$

Mit Berücksichtigung der Gleichung (23) erhält man aus Gleichung (22) für die Funktion W folgende Differentialgleichung:

$$\alpha W + \frac{\partial\left(\sin\vartheta \frac{\partial W}{\partial\vartheta}\right)}{\sin\vartheta\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2} = 0$$

Setzt man hierin $\cos\vartheta = x$ und für α seinen Wert $n(n+1)$ so geht sie über in

$$(27) \qquad \frac{\partial\left[(1-x^2)\frac{\partial W}{\partial x}\right]}{\partial x} + \frac{1}{1-x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2} + n(n+1)W = 0$$

Diese Differentialgleichung führt auf das Gebiet der Kugelfunktionen. Denn jede Funktion, welche dieser Gleichung genügt, ist eine Kugelfunktion n^{ter} Ordnung, die nicht wie die einfachen Kugelfunktionen nur von einem Argument, sondern von zwei Argumenten, wie hier von ϑ und φ resp. x und φ, abhängt.

Um eine weitere Integration der Differentialgleichung (27) herbeizuführen, zerlegt man diese Funktion W, ähnlich wie vorher F und U, in das Produkt von zwei neuen Funktionen, indem man setzt

$$(28) \qquad W = \Phi \cdot X$$

worin Φ wieder nur von φ und X nur von x abhängen soll.

Durch diese neue Substitution geht Gleichung (27) über in

$$\Phi\frac{d\left[(1-x^2)\frac{dX}{dx}\right]}{dx} + \frac{1}{1-x^2}X\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + n(n+1)\Phi X = 0$$

oder mit ΦX dividiert

$$\frac{1}{X}\frac{d\left[(1-x^2)\frac{dX}{dx}\right]}{dx} + \frac{1}{1-x^2}\left[\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}\right] + n(n+1) = 0$$

Wiederum wie bei den Gleichungen (14) und (24) lässt sich hier schliessen, dass, da Φ nur von φ und X nur von x abhängt, jeder Teil von (29) einer Konstanten entgegengesetzt gleich sein muss, also

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -m^2$$

oder

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -m^2\Phi \tag{30}$$

Diese Differentialgleichung hat die partikulären Lösungen

$$\Phi_1 = \cos m\varphi$$
$$\Phi_2 = \sin m\varphi$$

woraus sich dann die allgemeine Lösung ergibt

$$\Phi = M\cos m\varphi + N\sin m\varphi \tag{31}$$

worin m der Bedingung der Stetigkeit zu Folge, notwendig eine ganze Zahl sein muss. Die aus Gleichung (29) für X resultierende Differentialgleichung lautet, wenn man an Stelle von $\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}$ die eingeführte Konstante $-m^2$ setzt

$$\frac{d\left[(1-x^2)\frac{dX}{dx}\right]}{dx} + \left\{n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right\}X = 0 \tag{32}$$

Substituiert man hierin für X noch den Ausdruck

$$X = \sqrt{1-x^2}^{\,m}\, X_m^n \tag{33}$$

so geht diese Gleichung über in

$$(1-x^2)\frac{d^2X_m^n}{dx^2} - 2(m+1)x\frac{dX_m^n}{dx} + \left\{(n+1)n - (m+1)m\right\}X_m^n = 0 \tag{34}$$

Lässt man hierin $m = 0$ werden, so verwandelt sie sich, wenn man für X_m^n das Zeichen $P^n(x)$ wählt, in

$$(1-x^2)\frac{d^2P^n(x)}{dx^2} - 2x\frac{dP^n(x)}{dx} + n(n+1)P^n(x) = 0 \tag{35}$$

Diese Gleichung ist aber die Differentialgleichung der einfachen Kugelfunktion

$$P^n(x) = \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{1.2.3\ldots\ n}\left(x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2}\right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} - \ldots\ldots\right)$$

Differentiert man Gleichung (35) m mal hintereinander nach x, so gelangt man wieder zu der Gleichung (34), so dass also

$$X_m^n = \frac{d^m P^n(x)}{dx^m} \tag{36}$$

Hierbei ist jedoch zu bemerken, dass

$$m \leqq n$$

sein muss, was sich aus folgender Betrachtung ergibt. Ersetzt man in Gleichung (34)

$$\frac{dX}{dx} \text{ durch } \frac{dX}{d(x^2)}2x$$

$$\frac{d^2X}{dx^2} \text{ durch } \frac{d^2X}{d(x^2)^2}4x^2 + 2\frac{dX}{d(x^2)}(1-x^2)$$

so geht sie über in die Form

$$x^2(1-x^2)\frac{d^2X}{d(x^2)^2} + \left(\frac{1}{2} - (m+\frac{3}{2})x^2\right)\frac{dX}{d(x^2)}$$

$$+ \frac{1}{4}\left(n(n+1) - m(m+1)\right)X = 0$$

Diese Gleichung stimmt aber überein mit der Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe für x^2. Sie hat also die beiden partikulären Lösungen

$$X_1 = F(\alpha, \beta, \gamma, x^2)$$

$$X_2 = x^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, x^2)$$

oder für α, β, γ die sich durch Vergleichung ergebenden Werte eingesetzt

$$X_1 = F\left(\frac{m-n}{2}, \frac{m+n+1}{2}, \frac{1}{2}, x^2\right)$$

$$X_2 = xF\left(\frac{m-n+1}{2}, \frac{m+n+2}{2}, \frac{3}{2}, x^2\right)$$

Diese beiden Lösungen sind jedoch im allgemeinen unendliche Reihen und werden für $x = 1$ selbst unendlich gross. Da aber die Integrale X_1 und X_2 der Differentialgleichung (34) auf der ganzen Kugelfläche stetig sein sollen, so müssen ihre Reihenentwicklungen abbrechen. Die notwendige und hinreichende Bedingung, dass die hypergeometrische Reihe

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x^2)$$

abbreche und eine ganze rationale Funktion werde, ist nun die, dass α oder β negative ganze Zahlen seien. Damit also X_1 und X_2 solche Funktionen darstellen, muss einerseits

$$m \equiv n \qquad mod\, 2 \text{ und } m \leqq n$$

und andererseits

$$m \equiv n + 1 \; mod\, 2 \text{ und } m \leqq n - 1$$

sein, womit dann gezeigt ist, dass in der That $m \leqq n$ sein muss.

Eine vollständige Lösung von (34) wird daher die Form haben

$$X = \sum_{0,n}^{m} A_m^n \sqrt{1 - x^2}^m X_m^n \tag{37}$$

wo A_m^n eine Konstante bezeichnet.

Setzt man sich nun die ursprüngliche Funktion F wieder rückwärts aus den einzelnen Lösungen zusammen, so ergibt sich

$$F = \tau R \Phi X$$

oder die einzelnen Werte eingesetzt

$$F^n = \sum_{0,n}^{m} \left[\left(A \cos \frac{2\pi t}{T_n} + B \sin \frac{2\pi t}{T_n} \right) A r^n \left(M \cos m\varphi + N \sin m\varphi \right) A_m^n \sqrt{1 - x^2}^m X_m^n \right]$$

Berücksichtigt man, dass A und B (pag. 5) auch noch Funktionen U enthalten können, so lässt sich F^n (mit Unterdrückung der Konstanten A und A_m^n, was nur eine andere Definition der übrigen Konstanten nach sich ziehen würde) auch auf die Form bringen

$$F^n = \sum_{0,n}^{m} \left[\left(\left\{ \mathfrak{A}_m^n \cos m\varphi + \mathfrak{B}_m^n \sin m\varphi \right\} \cos \frac{2\pi t}{T_n} + \left\{ \mathfrak{C}_m^n \cos m\varphi + \mathfrak{D}_m^n \sin m\varphi \right\} \sin \frac{2\pi t}{T_n} \right) r^n \sqrt{1 - x^2}^m X_m^n \right] \tag{38}$$

Um hieraus eine allgemeine Lösung zu erhalten, hat man in Bezug auf n von 0 bis ∞ zu summieren, so dass diese die Form erhält

$$(39)\qquad F = \sum_{0,\infty}^{n} F^n$$

Dividiert man die rechte Seite von (39) noch durch $\mathfrak{R}^n$, so nimmt die Funktion F an der Oberfläche der Flüssigkeit folgenden Wert an:

$$(40)\qquad \overline{F} = \sum_{0,\infty}^{n} \sum_{0,n}^{m} \left[\left(\left\{ \mathfrak{A}_m^n \cos m\varphi + \mathfrak{B}_m^n \sin m\varphi \right\} \cos \frac{2\pi t}{T_n} + \left\{ \mathfrak{C}_m^n \cos m\varphi + \mathfrak{D}_m^n \sin m\varphi \right\} \sin \frac{2\pi t}{T_n} \right) \sqrt{1-x^2}^{\,m} X_m^n \right]$$

3. Bestimmung der Integrationskonstanten.

Um die in der Funktion F auftretenden Konstanten zu bestimmen, muss man annehmen, dass zu einer bestimmten Zeit am vorteilhaftesten zur Zeit $t = 0$, die Grössen ξ, η, ζ und ihre Ableitungen nach der Zeit an der Oberfläche der Flüssigkeit gegeben seien d. h. dass zur Zeit $t = 0$ die Oberfläche eine bestimmte Gestalt und die Teilchen derselben eine bestimmte Geschwindigkeit haben. Für die Annahme $t = 0$ geht Gleichung (40) über in

$$(41)\qquad \overline{F} = \sum_{0,\infty}^{n} \sum_{0,n}^{m} (\mathfrak{A}_m^n \cos m\varphi + \mathfrak{B}_m^n \sin m\varphi) \sqrt{1-x^2}^{\,m} X_m^n$$

und hieraus folgt durch Differentiation nach t und nachher wieder $t = 0$ gesetzt

$$(42)\qquad \left[\frac{\partial \overline{F}}{\partial t}\right]_0 = \sum_{0,\infty}^{n} \sum_{0,n}^{m} (\mathfrak{C}_m^n \cos m\varphi + \mathfrak{D}_m^n \sin m\varphi) \frac{2\pi}{T_n} \sqrt{1-x^2}^{\,m} X_m^n$$

Nun war aber nach Gleichung (9) für die Oberfläche der Flüssigkeit

$$\overline{F} = -\frac{4}{3} \varepsilon\pi (a\xi + b\eta + c\zeta)$$

mithin

$$\frac{\partial \overline{F}}{\partial t} = -\frac{4}{3} \varepsilon\pi (a\xi' + b\eta' + c\zeta')$$

wobei der Accent die Differentiation nach der Zeit andeuten soll.

Um also die Funktion F völlig zu bestimmen, hat man nur anzunehmen, dass zur Zeit $t = 0$ die beiden Grössen

$$\left| a\xi_0 + b\eta_0 + c\zeta_0 \right|$$
$$\left| a\xi'_0 + b\eta'_0 + c\zeta'_0 \right|$$

als willkürliche aber bekannte Funktionen von x und φ gegeben seien, da ja für die Oberfläche $r = \mathfrak{R}$, also konstant wird. Man hat somit zur Bestimmung von F die beiden Gleichungen

$$(43) \quad \left[\overline{F} \right]_0 = \sum_{0,\infty}^{n} \sum_{0,n}^{m} \left[\left\{ \mathfrak{A}_m^n \cos m\varphi + \mathfrak{B}_m^n \sin m\varphi \right\} \sqrt{1-x^2}^{\,m} X_m^n \right] = f_1(x,\varphi)$$

$$(44) \quad \left[\frac{\partial \overline{F}}{\partial t} \right]_0 = \sum_{0,\infty}^{n} \sum_{0,n}^{m} \left[\left\{ \mathfrak{C}_m^n \cos m\varphi + \mathfrak{D}_m^n \sin m\varphi \right\} \frac{2\pi}{T_n} \sqrt{1-x^2}^{\,m} X_m^n \right]$$
$$= f_2(x,\varphi)$$

Gleichung (43) liefert die Konstanten $\mathfrak{A}_m^n$ und $\mathfrak{B}_m^n$ und Gleichung (44) die Konstanten $\mathfrak{C}_m^n$ und $\mathfrak{D}_m^n$.

Um diese Konstanten zu bestimmen ist es erforderlich, die beiden willkürlichen Funktionen $f_1(x,\varphi)$ und $f_2(x,\varphi)$ in Reihen zu entwickeln, die nach Kugelfunktionen fortschreiten.

Entwicklung einer willkürlichen Funktion *) zweier Variablen nach Kugelfunktionen.

Bezeichnet man mit R, ϑ, φ oder ($\cos\vartheta = x$ gesetzt) mit R, x, φ die Polarkoordinaten eines veränderlichen Punktes, so wird jede Gleichung von der Form

$$R = F(x,\varphi)$$

eine bestimmte Fläche darstellen. Setzt man daher speciell

$$R = \mathfrak{R}(1 + \alpha f(x,\varphi))$$

wo $\mathfrak{R}$ eine positive Konstante, α eine unendlich kleine Grösse und $f(x,\varphi)$ eine willkürliche aber stets endlich bleibende Funktion der Variablen x und φ bezeichnen mag, so wird offenbar die letzte Gleichung eine Fläche darstellen, die nur unendlich wenig von der mit $\mathfrak{R}$ um den Koordinatenanfangspunkt beschriebenen Kugeloberfläche abweicht. Eine derartige Fläche führt den Namen Laplace'sches Sphäroid (pag. 3).

Die Entwicklung einer willkürlichen Funktion $f(x,\varphi)$ nach Kugelfunktionen lässt sich mit Hülfe des Laplace'schen Satzes über das homogene Sphäroid einfach durchführen, weshalb dieser Satz zunächst hier vorausgeschickt werden soll.

*) Diese Entwicklung wurde entnommen aus Neumann: „Vorlesungen über die Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen."



Es sei O das Zentrum des Sphäroids und zugleich Anfangspunkt des zu Grunde gelegten Polarkoordinatensystems. Ferner sei die Gerade OP (Fig. II.) irgend eine von O ausgehende feste Gerade, welche die Oberfläche des Sphäroids in S schneide. Um nun das Potential des Sphäroids auf einen Punkt P', der auf der Geraden OP verschiebbar ist, zu berechnen, konstruiere man ausser der um O mit dem Radius $\mathfrak{R}$ beschriebenen Kugelfläche noch eine zweite Kugelfläche mit demselben Radius, die aber durch S geht und deren Mittelpunkt auf OP liegt. Da nun das Sphäroid nur unendlich wenig von der ersten Kugel K abweicht, und diese wiederum durch eine unendlich kleine Verschiebung in die Kugel K' übergeführt werden kann, so wird das Sphäroid auch nur unendlich wenig von dieser zweiten Kugel abweichen. Fasst man nun den längs OP verschiebbaren Punkt P' ins Auge, so wird das Potential des Sphäroids auf diesen Punkt den Wert haben

$$V = \frac{M}{\varrho} + \sum \frac{dm_a}{e} - \sum \frac{dm_i}{e}$$

Hierbei soll $\frac{M}{\varrho}$ das Potential der Kugel K' (diese mit homogener Masse erfüllt gedacht) bezeichnen, so dass also

$$M = \frac{4}{3}\mathfrak{R}^3 \pi \delta \text{ und } \varrho = O'P'$$

Ausserdem sollen dm_a und dm_i diejenigen unendlich kleinen Massenelemente bezeichnen, die noch der Hülfskugel K' hinzugefügt resp. weggenommen werden müssen, um sie in das Sphäroid zu verwandeln. Die Grösse e bezeichnet den jedesmaligen Abstand eines solchen Massenelementes von dem betrachteten Punkte P'. Bezeichnet man kurzweg mit dm den Inbegriff aller dm_a und dm_i, so kann man das Potential auch in der Form schreiben

$$V = \frac{M}{\varrho} + \sum \frac{dm}{e}$$

oder für e seinen Wert

$$e = \sqrt{\mathfrak{R}^2 + \varrho^2 - 2\mathfrak{R}\varrho\cos\psi}$$

eingesetzt

$$V = \frac{M}{\varrho} + \sum \frac{dm}{\sqrt{\mathfrak{R}^2 + \varrho^2 - 2\mathfrak{R}\varrho\cos\psi}}$$

Differentiert man diese Gleichung nach ϱ, so ergibt sich

$$\frac{\partial V}{\partial \varrho} = -\frac{M}{\varrho^2} - \sum \frac{(\varrho - \mathfrak{R}\cos\psi)\,dm}{\sqrt{\mathfrak{R}^2 + \varrho^2 - 2\mathfrak{R}\varrho\cos\psi}^{\,3}}$$

oder da ϱ und $r = OP'$ nur um eine konstante Strecke von einander verschieden sind, auch

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{M}{\varrho^2} - \sum \frac{(\varrho - \mathfrak{R}\cos\psi)\,dm}{\sqrt{\mathfrak{R}^2 + \varrho^2 - 2\mathfrak{R}\varrho\cos\psi}^{\,3}}$$

Lässt man nun den Punkt P' auf OP nach S rücken, also ϱ in $\mathfrak{R}$ übergehen, so gehen die Ausdrücke für V und $\frac{\partial V}{\partial r}$ über in

$$\overline{V} = \frac{M}{\mathfrak{R}} + \frac{1}{\mathfrak{R}} \sum \frac{dm}{\sqrt{2 - 2\cos\psi}}$$

$$\overline{\frac{\partial V}{\partial r}} = -\frac{M}{\mathfrak{R}^2} - \frac{1}{2\mathfrak{R}^2} \sum \frac{dm}{\sqrt{2 - 2\cos\psi}}$$

wobei wieder der horizontale Strich den Wert für die Oberfläche andeuten soll. Multipliziert man die erste dieser beiden Gleichungen mit 1 und die zweite mit $2\mathfrak{R}$ und addiert sie, so erhält man

$$\overline{V} + 2\mathfrak{R}\frac{\partial \overline{V}}{\partial r} = -\frac{M}{\mathfrak{R}} = -\frac{4}{3}\delta\pi\mathfrak{R}^2$$

Diese Gleichung repräsentiert den Laplace'schen Satz und besagt folgendes: Wenn ein von der Fläche

$$R = \mathfrak{R}(1 + \alpha f(x, \varphi))$$

begrenztes homogenes Sphäroid von der konstanten Dichtigkeit δ gegeben ist, so gilt die Relation

$$V + 2\mathfrak{R}\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{4}{3}e\pi\delta\mathfrak{R}^2$$

wo unter V und $\frac{\partial V}{\partial r}$ diejenigen Werte zu verstehen sind, welche V und $\frac{\partial V}{\partial r}$ annehmen, sobald der betreffende Punkt auf irgend einer Oberflächenstelle des Sphäroids liegt.

Um nun wieder auf die vorliegende Aufgabe der Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach Kugelfunktionen zurückzukommen, lege man wieder um das Zentrum eines Sphäroids, das zugleich Koordinatenanfangspunkt sein soll, eine Kugel mit dem Radius $\mathfrak{R}$, die nur unendlich wenig von dem Sphäroid verschieden ist. Durch eine analoge Betrachtung, wie

vorher, erhält man für das Potential des Sphäroids auf einen äusseren Punkt P mit den Koordinaten r, x, φ

$$V = \frac{M}{r} + \sum \frac{dm}{e}$$

Denkt man sich nun auf der Oberfläche der mit $\mathfrak{R}$ beschriebenen Kugel (Fig. 3) ein Oberflächenelement $dO = \mathfrak{R}^2 d\xi dp$ herausgeschnitten und von O aus einen Elementarkegel nach der Peripherie dieses Elementes hingelegt, so wird dieser entweder ein Massenelement dm_a oder dm_i ausschneiden, dessen Basis aber beide Male $\mathfrak{R}^2 d\xi dp$ sein wird. Die Höhe dagegen ergibt sich aus den beiden Gleichungen

$$\mathfrak{R}(1 + \alpha f(\xi, p)) - \mathfrak{R} = \mathfrak{R} \alpha f(\xi, p)$$
$$\mathfrak{R} - \mathfrak{R}(1 + \alpha f(\xi, p)) = -\mathfrak{R} \alpha f(\xi, p)$$

so dass also

$$dm_a = \delta \mathfrak{R}^2 d\xi \, dp \,.\, \mathfrak{R} \alpha f(\xi, p)$$
$$dm_i = -\delta \mathfrak{R}^2 d\xi \, dp \,.\, \mathfrak{R} \alpha f(\xi, p)$$

oder allgemein

$$dm = \delta \mathfrak{R}^3 f(\xi, p) \, d\xi \, dp$$

Setzt man diesen Wert von dm in die Gleichung für V ein, so erhält man

$$V = \frac{M}{r} + \delta \alpha \mathfrak{R}^3 \int_{-1}^{+1} \int_{0}^{2\pi} \frac{f(\xi, p) \, d\xi \, dp}{e}$$

indem die Summation in eine Integration über die ganze Kugeloberfläche übergeht. Die Grösse e bezeichnet den Abstand des Punktes P von dem betrachteten Massenelement ($d\xi$, dp). Nun besteht aber für den reziproken Wert der Entfernung zweier Raumpunkte die Relation

$$\frac{1}{e} = \sum_{0,\infty}^{n} \frac{\mathfrak{R}^n}{r^{n+1}} P^n(\cos \gamma)$$

wobei γ den Winkel zwischen $OP = r$ und $Odm = \mathfrak{R}$ bezeichnet und P^n $(\cos \gamma)$ eine Kugelfunktion dieses Argumentes. Durch Substitution dieses Wertes von $\frac{1}{e}$ geht das Potential V über in

$$V = \frac{M}{r} + \alpha \sum \frac{1}{r^{n+1}} Z_n$$

und hieraus ergibt sich durch Differentiation

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{M}{r^2} - \alpha \sum \frac{n+1}{r^{n+2}} Z_n$$

worin Z_n die Bedeutung hat

$$Z_n = \delta \mathfrak{R}^{n+3} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} P^n(\cos\gamma) f(\xi, p)\, d\xi\, dp$$

Lässt man jetzt den Punkt P auf das Sphäroid also nach P' fallen, so geht r über in $\mathfrak{R}(1 + \alpha f(x, \varphi))$ und man erhält mit Vernachlässigung der zweiten Potenz von α

$$V = \frac{M(1 - \alpha f(x, \varphi))}{\mathfrak{R}} + \alpha \sum \frac{1}{\mathfrak{R}^{n+1}} Z_n$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{M(1 - 2\alpha f(x, \varphi))}{\mathfrak{R}^2} - \alpha \sum \frac{n+1}{\mathfrak{R}^{n+2}} Z_n$$

Multipliziert man die erste dieser beiden Gleichungen mit 1 und die zweite mit $2\mathfrak{R}$ und addiert sie, so ergibt sich

$$V + 2\mathfrak{R} \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{M}{r} - \frac{3\alpha M f(x, \varphi)}{\mathfrak{R}} - \alpha \sum \frac{2n+1}{\mathfrak{R}^{n+1}} Z_n$$

oder mit Hülfe des Laplace'schen Satzes

$$-\frac{4}{3} \delta \pi \mathfrak{R}^2 = -\frac{M}{\mathfrak{R}} - \frac{3\alpha M f(x, \varphi)}{\mathfrak{R}} - \alpha \sum \frac{2n+1}{\mathfrak{R}^{n+1}} Z_n$$

und für M seinen Wert eingesetzt

$$f(x, \varphi) = \frac{1}{4\pi\delta\mathfrak{R}^2} \sum \frac{2n+1}{\mathfrak{R}^{n+1}} Z_n$$

Schreibt man diese Gleichung in der einfacheren Form

$$f(x, \varphi) = \sum_{0,\infty}^{n} X^n(\xi, p)$$

so hat das allgemeine Glied den Wert

$$X^n(\xi, p) = \frac{2n+1}{4\pi\delta\mathfrak{R}^{n+3}} Z_n$$

$$= \frac{2n+1}{4\pi} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} P^n(\cos\gamma) f(\xi, p)\, d\xi\, dp$$

Bezeichnet man nun mit γ (Fig. 4) den Winkel der beiden Richtungen (x, φ) und (ξ, p), so ist

$$\cos\gamma = x\xi - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\xi^2}\cos(\varphi - p)$$

Die Kugelfunktion $P^n(\cos\gamma)$ ist daher in Bezug auf x und ξ symetrisch und darstellbar in der Reihe

$$P^n(\cos\gamma) = \sum_{0,n}^{m} a_m^n \sqrt{1-x^2}^m \sqrt{1-\xi^2}^m P_m^n(x)\, P_m^n(\xi)\cos m(\varphi - p)$$

Entwickelt man $\cos m(\varphi - p)$ nach der Formel

$$\cos m(\varphi - p) = \cos m\varphi \cos mp + \sin m\varphi \sin mp$$

so kann man auch schreiben

$$P^n(\cos\gamma) = \sum_{0,n}^{m} a_m^n \sqrt{1-x^2}^m \sqrt{1-\xi^2}^m P_m^n(x)\, P_m^n(\xi)\cos mp \cos m\varphi$$
$$+ \sum_{0,n}^{m} a_m^n \sqrt{1-x^2}^m \sqrt{1-\xi^2}^m P_m^n(x)\, P_m^n(\xi)\sin mp \sin m\varphi$$

Setzt man diesen Wert von $P^n(\cos\gamma)$ in die Entwicklung von $f(x, \varphi)$ ein, so erhält man das endgültige Resultat

$$f(x,\varphi) = \sum_{0,\infty}^{n} \sum_{0,n}^{m} \frac{2n+1}{4\pi} \int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} a_m^n \sqrt{1-x^2}^m \sqrt{1-\xi^2}^m P_m^n(x)\, P_m^n(\xi)$$
$$f(\xi,p)\cos m\varphi \cos mp\, d\xi\, dp$$
$$+ \sum_{0,\infty}^{n} \sum_{0,n}^{m} \frac{2n+1}{4\pi} \int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} a_m^n \sqrt{1-x^2}^m \sqrt{1-\xi^2}^m P_m^n(x)\, P_m^n(\xi)$$
$$f(\xi,p)\sin m\varphi \sin mp\, d\xi\, dp$$

oder die in Bezug auf die Integrationsvariablen konstanten Grössen vor das Integralzeichen herausgezogen

$$f(x,\varphi) = \sum_{0,\infty}^{n} \sum_{0,n}^{m} \frac{2n+1}{4\pi} a_m^n \sqrt{1-x^2}^m P_m^n(x)\cos m\varphi \int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi}$$
$$\sqrt{1-\xi^2}^m P_m^n(\xi)\cos mp\, f(\xi,p)\, d\xi\, dp$$

$$+\sum_{0,\infty}^{n}\sum_{0,n}^{m}\frac{2n+1}{4\pi}a_m^n\sqrt{1-x^2}^m P_m^n(x)\sin m\varphi\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi}$$

$$\sqrt{1-\xi^2}^m P_m^n(\xi)\sin mp f(\xi,p)\,d\xi\,dp$$

worin

$$a_m^n=\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n+m)}$$

Wendet man das soeben erhaltene Resultat auf die beiden Gleichungen (43) und (44) an, so ergeben sich unmittelbar durch Vergleichung, da $P_m^n(x)$ und X_m^n nur verschiedene Bezeichnungen für ein und dieselbe Funktion sind, wenn man $f_1(x,\varphi)$ und $f_2(x,\varphi)$ in der dargestellten Weise nach Kugelfunktionen entwickelt, die Konstanten

$$\mathfrak{A}_m^n=\frac{2n+1}{4\pi}\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n+m)}\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi}\sqrt{1-\xi^2}^m f_1(\xi,p)\cos mp\,X_m^n(\xi)\,d\xi\,dp$$

$$\mathfrak{B}_m^n=\frac{2n+1}{4\pi}\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n+m)}\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi}\sqrt{1-\xi^2}^m f_1(\xi,p)\sin mp\,X_m^n(\xi)\,d\xi\,dp$$

$$\mathfrak{C}_m^n=\frac{2n+1}{4\pi}\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n+m)}\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi}\sqrt{1-\xi^2}^m f_2(\xi,p)\cos mp\,X_m^n(\xi)\,d\xi\,dp$$

$$\mathfrak{D}_m^n=\frac{2n+1}{4\pi}\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n+m)}\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi}\sqrt{1-\xi^2}^m f_2(\xi,p)\sin mp\,X_m^n(\xi)\,d\xi\,dp$$

4. Darstellung der unendlich kleinen Verschiebungen $\xi\ \eta\ \zeta$ selbst.

Um die Grössen $\xi\ \eta\ \zeta$ selbst zu erhalten, muss man von den Differentialgleichungen (3) ausgehen, nach welchen

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial F}{\partial a}$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{\partial F}{\partial b}$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{\partial F}{\partial c}$$

war. Integriert man dieses System von Differentialgleichungen einmal nach t, so erhält man

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \int \frac{\partial F}{\partial a} dt + C_1$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \int \frac{\partial F}{\partial b} dt + C_2$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \int \frac{\partial F}{\partial c} dt + C_3$$

wobei C_1 C_2 C_3 in Bezug auf t konstant, sonst aber noch recht wohl von a, b, c resp. r ϑ φ abhängen können. Eine zweite Integration nach t würde ergeben

$$\xi = \int\int \frac{\partial F}{\partial a} dt^2 + C_1 t + K_1$$

$$\eta = \int\int \frac{\partial F}{\partial b} dt^2 + C_2 t + K_2$$

$$\zeta = \int\int \frac{\partial F}{\partial c} dt^2 + C_3 t + K_3$$

wo wiederum K_1 K_2 K_3 unabhängig von t sind, wohl aber von den räumlichen Koordinaten abhängen können. Das Zeichen dt^2 soll andeuten, dass hier keine Doppelintegrale vorliegen, sondern eine zweimalige Integration nach t ausgeführt werden soll. Führt man diese zweimalige Integration von F nach t wirklich aus, so ergibt sich, wenn man

$$\Phi = \sum_{0,\infty}^{n} \sum_{0,n}^{m} \left[\frac{T_n^2}{4\pi^2} \left\{ \left(\mathfrak{A}_m^n \cos m\varphi + \mathfrak{B}_m^n \sin m\varphi \right) \cos \frac{2\pi t}{T_n} + \left(\mathfrak{C}_m^n \cos m\varphi + \mathfrak{D}_m^n \sin m\varphi \right) \sin \frac{2\pi t}{T_n} \right\} \sqrt{1 - x^2}^{\,m} X_m^n \right]$$

setzt, das Gleichungssystem

$$\xi = -\frac{\partial \Phi}{\partial a} + C_1 t + K_1$$

$$\eta = -\frac{\partial \Phi}{\partial b} + C_2 t + K_2$$

$$\zeta = -\frac{\partial \Phi}{\partial c} + C_3 t + K_3$$

Die einfache Betrachtung, dass die Schwingungen periodisch wiederkehren, lehrt, dass die Grössen

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0$$

sein müssen, da sonst $\xi\ \eta\ \zeta$ mit der Zeit immer mehr wachsen würden. Es werden somit

$$(45)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi &= -\frac{\partial \Phi}{\partial a} + K_1 \\ \eta &= -\frac{\partial \Phi}{\partial b} + K_2 \\ \zeta &= -\frac{\partial \Phi}{\partial c} + K_3 \end{aligned}\right.$$

Hierbei müssen noch $\xi\ \eta\ \zeta$ der Bedingung genügen

$$\frac{\partial \xi}{\partial a} + \frac{\partial \eta}{\partial b} + \frac{\partial \zeta}{\partial c} = 0.$$

Hieraus folgt dann, dass auch

$$\frac{\partial K_1}{\partial a} + \frac{\partial K_2}{\partial b} + \frac{\partial K_3}{\partial c} = 0$$

sein muss, während im übrigen $K_1\ K_2\ K_3$ ihrer Natur nach nicht bestimmt werden können.

5. Knotenlinien.

Für die Knotenlinien d. h. für die Kurven derjenigen Punkte der Flüssigkeitsoberfläche, die bei den Schwingungen der Flüssigkeit in Ruhe bleiben, muss

$$F^n = \sum_{0,n}^{m} \left[\left\{ \left(\mathfrak{A}_m^n \cos m\varphi + \mathfrak{B}_m^n \sin m\varphi \right) \cos \frac{2\pi t}{T_n} \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(\mathfrak{C}_m^n \cos m\varphi + \mathfrak{D}_m^n \sin m\varphi \right) \sin \frac{2\pi t}{T_n} \right\} \sqrt{1-x^2}^{\,m}\; X_m^n \right]$$

immer gleich Null sein, denn in diesen Linien ist U, also die Normalkomponente der Geschwindigkeit, gleich Null. Man erhält diese Knotenlinien daher, wenn man ein Glied der Reihe in Bezug auf t, also einen Wert von x, beibehält. Die einfachsten Knotenlinien werden sich offenbar aus der Gleichung

$$(46) \qquad \left(\mathfrak{A}_m^n \cos m\varphi + \mathfrak{B}_m^n \sin m\varphi\right)\sqrt{1-x^2}^m \, X_m^n = 0$$

ergeben. Hieraus folgt dann zunächst

$$\sqrt{1-x^2}^m \, X_m^n = 0$$

was sich wiederum in die beiden Gleichungen

$$\alpha \quad \ldots \quad \sqrt{1-x^2}^m = 0$$

$$\beta \quad \ldots \quad X_m^n = 0$$

zerlegen lässt. Aus der Bedingungsgleichung α ergibt sich

$$x = \cos\vartheta = \pm 1$$

mithin für ϑ die Werte

$$\vartheta = 0 \text{ oder } = \pi$$

d. h. die beiden Pole der Kugel stellen Knotenlinien dar, die sich auf einen Punkt reduzieren. Um die zweite Gleichung β

$$X_m^n = 0$$

zu diskutieren, beachte man, dass

$$X_m^n = \frac{d^m P^n(x)}{dx^m}$$

worin $P^n(x)$ den auf pag. 13 angegebenen Wert besitzt. Betrachtet man deshalb zunächst die Gleichung

$$P^n(x) = 0$$

so sind deren Wurzeln sämmtlich reell und kleiner als 1. Der Wert 1 selbst gehört nicht dazu, da ja

$$P^n(1) = 1$$

Ist ferner $x = x_1$ einer Wurzel derselben, so ist auch $x = -x_1$

eine solche. Dass andererseits sämmtliche Wurzeln von einander verschieden sind, folgt aus der Differentialgleichung

$$(1-x^2)\frac{d^2P^n}{dx^2}-2x\frac{dP^n}{dx}+n(n+1)P^n=0$$

Denn wären mehrere, auch nur zwei, Wurzeln einander gleich, etwa $=\alpha$, so würde nicht nur $P^n(x)$ sondern auch noch der erste Differentialquotient für $x=\alpha$ verschwinden, und zu Folge der Differentialgleichung auch noch der zweite. Differentiert man nun die Differentialgleichung s mal hintereinander nach x

$$(1-x^2)\frac{d^{s+2}P^n(x)}{dx^{s+2}}-2(s+1)x\frac{d^{s+1}P^n(x)}{dx^{s+1}}$$
$$+(n-s)(n+s+1)\frac{d^sP^n(x)}{dx^s}=0$$

so würde hieraus folgen, dass alle Differentialquotienten von $P^n(x)$ für $x=\alpha$ verschwinden würden, also auch der n^{te}, der doch eine von n verschiedene Konstante ist. Somit müssen also sämmtliche Wurzeln von $P^n(x)$ von einander verschieden sein. Was aber für die Funktion $P^n(x)$ gilt, hat auch für jeden ihrer Differentialquotienten Gültigkeit, also auch für

$$X_m^n=0$$

so dass also sämmtliche Wurzeln $x=\cos\vartheta$ von $X_m^n=0$ reell und kleiner als 1 sind, d. h. sämmtliche Winkel ϑ haben der Gleichung zu genügen

$$0<\vartheta<\pi$$

Die Knotenlinien bestehen also aus einem System von Parallelkreisen (Fig. 5).

Um die andere Schaar der Knotenlinien zu erhalten, hat man offenbar den zweiten Faktor von Gleichung (46) gleich Null zu setzen, und erhält

$$\mathfrak{A}_m^n\cos m\varphi+\mathfrak{B}_m^n\sin m\varphi=0$$

Wie nun der vorige Ausdruck, der als Resultat die Parallelkreise ergab, unabhängig von φ war, so ist dieser wiederum unabhängig von ϑ, d. h. eine zweite Schaar Knotenlinien (Fig. 6) wird von Meridianen

gebildet, deren einzelnen Abstände von einem bestimmten Nullmeridian, durch die Wurzeln der Transpendenten Gleichung

$$\mathfrak{A}_m^n \cos m\varphi + \mathfrak{B}_m^n \sin m\varphi = 0$$

gegeben werden. Hierin können $\mathfrak{A}_m^n$ $\mathfrak{B}_m^n$ und m selbst alle möglichen Werte annehmen, so dass Meridiane durch alle Punkte des Aequators entstehen können.

In dem einfachsten Falle der vorliegenden Aufgabe ergeben sich also als Knotenlinien (Fig. 7) die Parallelkreise und Meridiane der Kugelfläche, und bilden somit das bekannteste Einteilungsnetz derselben.

Komplisiertere Knotenlinien.

Die bisher betrachteten einfachen Knotenlinien ergaben sich dadurch, dass immer nur ein Glied der Reihe (40) beibehalten wurde. Kompliziertere Knotenlinien werden deshalb auftreten, wenn man mehrere Glieder der Reihe beibehält, und zwar sollen hier speziell zwei Glieder beibehalten werden. Man kann alsdann noch folgende verhältnismässig einfache Gleichungen von Knotenlinien aufstellen

$$1 \ldots \quad \mathfrak{A}_1 \cos m_1 \varphi \sqrt{1-x^2}^{m_1} X_{m_1}^n + \mathfrak{A}_2 \cos m_2 \varphi \sqrt{1-x^2}^{m_2} X_{m_2}^n = 0$$

$$2 \ldots \quad \mathfrak{A}_1 \sin m_1 \varphi \sqrt{1-x^2}^{m_1} X_{m_1}^n + \mathfrak{A}_2 \sin m_2 \varphi \sqrt{1-x^2}^{m_2} X_{m_2}^n = 0$$

$$3 \ldots \quad \mathfrak{A}_1 \cos m_1 \varphi \sqrt{1-x^2}^{m_1} X_{m_1}^n + \mathfrak{A}_2 \sin m_2 \varphi \sqrt{1-x^2}^{m_2} X_{m_2}^n = 0$$

Diese drei Gleichungssysteme in denen m_1 und m_2 von einander verschieden sein sollen, sonst aber ebenso wie n, das aber in ein und derselben Gleichung immer dasselbe sein muss, beliebige Werte annehmen können, stellen ganz bestimmte Kurvenschaaren auf der Kugeloberfläche dar, die sich jedoch in dieser Allgemeinheit nicht wohl diskutieren lassen. Um also eine nähere Einsicht in diese Knotenlinienschaaren zu erhalten, ist es am geeignetsten spezielle und sehr einfache Annahmen über die in den Gleichungen auftretenden Grössen zu machen. Eine einfache Annahme dieser Art ist die, dass man dem Quotient der beiden Konstanten $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ den ebenfalls konstanten Wert a beilegt. Alsdann gehen die drei Gleichungen über in

$$\cos m_1 \varphi \sqrt{1-x^2}^{m_1} X_{m_1}^n + a \cos m_2 \varphi \sqrt{1-x^2}^{m_2} X_{m_2}^n = 0$$

$$\sin m_1 \varphi \sqrt{1-x^2}^{m_1} X_{m_1}^n + a \sin m_2 \varphi \sqrt{1-x^2}^{m_2} X_{m_2}^n = 0$$

$$\cos m_1 \varphi \sqrt{1-x^2}^{m_1} X_{m_1}^n + a \sin m_2 \varphi \sqrt{1-x^2}^{m_2} X_{m_2}^n = 0$$

Diese drei Gleichnngen reduzieren sich aber wesentlich auf nur zwei, indem man die erste und dritte Gleichung in eine zusammen fassen kann. Beachtet man nämlich, dass

$$\sin\varphi = -\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

so wird die dritte Gleichung durch diese Substitution dieselbe Kurvenschaar ergeben wie die erste, nur alles um einen Winkel von 90° gedreht. Man hat also nur die beiden Gleichungen

$$\cos m_1\varphi \sqrt{1-x^2}^{m_1} X^n_{m_1} + a\cos m_2\varphi X^n_{m_2} \sqrt{1-x^2}^{m_2} = 0$$

$$\sin m_1\varphi \sqrt{1-x^2}^{m_1} X^n_{m_1} + a\sin m_2\varphi X^n_{m_2} \sqrt{1-x^2}^{m_2} = 0$$

Geht man in dieser Betrachtung noch einen Schritt weiter und macht in der zweiten dieser Gleichungen dieselbe Substitution, so kann man wiederum beide Gleichungen auf die erste von ihnen reduzieren. Die Gleichung

$$\cos m_1\varphi \sqrt{1-x^2}^{m_1} X^n_{m_1} + a\cos m_2\varphi \sqrt{1-x^2}^{m_2} X^n_{m_2} = 0$$

wird nun verschiedene Schaaren von Knotenlinien ergeben, je nachdem man m_1, m_2 und n verschiedene numerische Zahlenwerte beilegt. In folgendem sollen nun die verhältnismässig einfachsten Fälle $n = 1$ und $n = 2$ betrachtet werden.

I. Fall $n = 1$.

Unter der Annahme $n = 1$ kann man, da m nicht grösser als n sein darf und m_1 und m_2 von einander verschieden sein sollen, nur den einen Fall

$$m_1 = 0 \quad m_2 = 1$$

unterscheiden. Setzt man daher diese Werte für m_1 und m_2 ein und für $P^1(x)$ seinen Wert $\cos\vartheta$, so geht die zu diskutierende Gleichung über in

$$\cos\vartheta + a\cos\varphi\sin\vartheta = 0$$

Stellt man sich hieraus zunächst φ und ϑ als explizite Funktionen von resp. ϑ und φ dar, so erhält man

$$\cos\varphi = -\frac{ctg\vartheta}{a}$$

$$tg\vartheta = -\frac{1}{a\cos\varphi}$$

Stellt man nun andererseits mit Hülfe dieser Relationen folgende Tabelle auf

φ	$\cos\varphi$	ϑ	$tg\,\vartheta$
0	1	ϑ_0	$-\frac{1}{a}$
$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$-\infty$
π	-1	$180-\vartheta_0$	$+\frac{1}{a}$
$\frac{3\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$+\infty$

so ersieht man hieraus, dass, während φ von 0^0 über $\frac{\pi}{2}$ und π nach $\frac{3\pi}{2}$ geht, ϑ von einem bestimmten Werte ϑ_0, der durch die Gleichung $tg\,\vartheta_0 = -\frac{1}{a}$ gegeben ist, über $\frac{\pi}{2}$ und $180-\vartheta_0$ wieder bis $\frac{\pi}{2}$ geht. Für $\varphi = 2\pi$ ist ϑ wieder $= \vartheta_0$. Die Kurve ist also, was auch zu erwarten war, eine geschlossene und berührt, da ϑ nie $< \vartheta_0$ und nie $> 180-\vartheta_0$ die beiden Parallelkreise $\vartheta = \vartheta_0$ und $\vartheta = 180-\vartheta_0$. Für den Differentialquotienten $\frac{d\vartheta}{d\varphi}$ ergibt sich der Wert

$$\frac{d\vartheta}{d\varphi} = -\frac{1}{a}\,\frac{\sin\varphi\cos^2\vartheta}{\cos^2\varphi} = -\frac{a\sin\varphi}{1+a^2\cos^2\varphi}$$

Es verschwindet daher $\frac{d\vartheta}{d\varphi}$ für $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$. Die Kurve hat also in der That für $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ Maximal- oder Minimalpunkte. Der zweite Differentialquotient

$$\frac{d^2\vartheta}{d\varphi^2} = -\frac{a\cos\varphi(1+a^2+a^2\sin^2\varphi)}{(1+a^2\cos^2\varphi)^2}$$

wird aber für $\varphi = 0$ negativ, für $\varphi = \pi$ positiv, so dass also die Kurve in dem Punkte $\varphi = 0$ ein Maximum und in dem Punkte $\varphi = \pi$ ein Minimum hat. Untersucht man weiterhin die Kurve auf Wendepunkte, so ergibt sich, dass die Bedingung hierfür nämlich

$$\frac{d^2\vartheta}{d\varphi^2} = 0$$

für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ erfüllt wird. Für diese Werte von φ hat aber ϑ den Wert $\frac{\pi}{2}$, so dass also die Kurve in den zwei Punkten, in denen sie den Aequator schneidet, zwei Wendepunkte aufweist. Ferner ergibt sich aus dem Werte von $\frac{d^2\vartheta}{d\varphi^2}$, dass die Kurve fällt, so lange φ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ und von $\frac{3\pi}{2}$ bis 2π geht, dagegen steigt, so lange φ von $\frac{\pi}{2}$ über π bis $\frac{3\pi}{2}$ geht. Die Kurve hat also ungefähr den in Fig. 8 angedeuteten Verlauf. In den Punkten P und P' hat sie ein Maximum resp. Minimum und in Q und Q' schneidet sie den Aequator und hat in diesen Punkten Inflexionspunkte.

Betrachtet man nun a als variablen Parameter, so erhält man für jeden positiven oder negativen Wert von a eine derartige Kurve, also eine einfach unendliche Schaar von Kurven, die alle zwischen zwei für jede Kurve der Schaar bestimmten Parallelkreisen ϑ_0 und $180 - \vartheta_0$ liegen und alle durch die nämlichen zwei Punkte des Aequators gehen, und diese Punkte zu Inflexionspunkten haben.

II. Fall $n = 2$.

Unter der Annahme $n = 2$ lassen sich mehrere Einzelfälle unterscheiden, je nachdem man m_1 und m_2 die Werte 0, 1, 2 zuerteilt.

1) $m_1 = 0 \quad m_2 = 1$.

Setzt man für $P^2 (\cos\vartheta)$ seinen Wert

$$P^2 (\cos\vartheta) = \frac{3}{2}\left(\cos^2\vartheta - \frac{1}{3}\right)$$

und $m_1 = 0$ $m_2 = 1$, so geht die zu betrachtende Gleichung über in

$$\frac{3}{2}\left(\cos^2\vartheta - \frac{1}{3}\right) + 3a\cos\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta = 0$$

oder umgeformt

$$2 - 3\sin^2\vartheta + 6a\cos\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta = 0$$

oder mit $\cos^2\vartheta$ dividiert und $\frac{1}{\cos^2\vartheta} = 1 + tg^2\vartheta$ gesetzt

$$2 - tg^2\vartheta + 6a\cos\varphi\, tg\vartheta = 0$$

Hieraus erhält man in expliziter Form

$$\cos\varphi = \frac{tg^2\vartheta - 2}{6\,a\,tg\,\vartheta}$$

$$tg\,\vartheta = 3\,a\cos\varphi \pm \sqrt{9\,a^2\cos^2\varphi + 2}$$

Da die Quadratwurzel für reelle Werte von φ als die Summe eines vollständigen Quadrates und einer positiven Zahlengrösse nie gleich Null werden kann, so erhält man für jeden Wert von φ zwei Werte von ϑ mittels der Gleichungen

$$1 \quad \ldots \quad tg\,\vartheta_1 = 3\,a\cos\varphi + \sqrt{9\,a^2\cos^2\varphi + 2}$$

$$2 \quad \ldots \quad tg\,\vartheta_2 = 3\,a\cos\varphi - \sqrt{9\,a^2\cos^2\varphi + 2}$$

Aus diesen Beziehungen geht daher hervor, dass die Kurve aus zwei getrennten Teilen bestehen wird. Ausserdem kann, wie sich aus (2) ersehen lässt, ϑ nie $= 0$, $\frac{\pi}{2}$ oder $= \pi$ werden, da die rechte Seite von (2) nie gleich Null oder gleich unendlich werden kann. Die Kurve wird also weder durch einen Pol gehen noch den Aequator schneiden. Jeder Zweig derselben wird zwischen zwei Parallelkreisen liegen und sie berühren. Um diese zu erhalten, hat man nur die Maxima resp. Minima der Kurve aufzusuchen. Diese ergeben sich aus der Gleichung

$$\frac{d\vartheta}{d\varphi} = \frac{6\,a\,tg\,\vartheta\sin\varphi\cos^2\vartheta}{6\,a\cos\varphi - 2\,tg\,\vartheta}$$

Die Bedingung eines Maximums resp. Minimums

$$\frac{6\,a\,tg\,\vartheta\sin\varphi\cos^2\vartheta}{6\,a\cos\varphi - 2\,tg\,\vartheta} = 0$$

kann nach dem vorher Gesagten nur für $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ erfüllt werden, da ϑ nie 0, π oder $\frac{\pi}{2}$ werden kann. Die Kurve hat also in den Punkten $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ Maximal- resp. Minimalpunkte. In diesen Punkten sind die zugehörigen Werte von ϑ bestimmt durch die Gleichungen

$$(tg\,\vartheta_1)_{\varphi=0} = 3\,a + \sqrt{9\,a^2 + 2}$$

$$(tg\,\vartheta_2)_{\varphi=0} = 3\,a - \sqrt{9\,a^2 + 2}$$

$$(tg\,\vartheta_1)_{\varphi=\pi} = -3a + \sqrt{9a^2+2}$$
$$(tg\,\vartheta_2)_{\varphi=\pi} = -3a - \sqrt{9a^2+2}$$

Schon hieraus lässt sich erkennen, dass die beiden Teile der Kurve symmetrisch in Bezug auf den Mittelpunkt der Kugel liegen, d. h. ein Durchmesser von einem Punkte des einen Teiles trifft den entsprechenden Punkt des anderen Teiles der Kurve. Es ist nämlich $(tg\,\vartheta_1)_{\varphi=0}$ gleich und entgegengesetzt $(tg\,\vartheta_2)_{\varphi=\pi}$. Dasselbe gilt von $(tg\,\vartheta_2)_{\varphi=0}$ und $(tg\,\vartheta_1)_{\varphi=\pi}$. Um nun den Verlauf der Kurve etwas genauer ins Auge zu fassen, gehe man von dem Werte $\varphi = 0$ aus. Für diesen Wert von φ haben $tg\,\vartheta_1$ und $tg\,\vartheta_2$ die oben angegebenen Werte. Es ist also in diesem Falle ein Wert von ϑ positiv, der andere negativ, da $\sqrt{9a^2+2} > 3a$ ist. Es wird also ein Punkt über und einer unter dem Aequator auf dem Nullmeridian liegen, und zwar der erstere näher am Aequator als der letztere, was man leicht aus den Werten der beiden Tangenten folgern kann. Lässt man nun φ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ zunehmen, so nehmen ϑ_1 und ϑ_2 bis zu einem bestimmten Werte ϑ'_1 und ϑ'_2 ab, die den Werten

$$tg\,\vartheta'_1 = \sqrt{2}$$
$$tg\,\vartheta'_2 = -\sqrt{2}$$

entsprechen. Lässt man nun φ weiter zunehmen bis π, so nehmen ϑ_1 und ϑ_2 immer weiter ab und erreichen für $\varphi = \pi$ ihre kleinsten Werte ϑ''_1 und ϑ''_2

$$tg\,\vartheta''_1 = -3a + \sqrt{9a^2+2}$$
$$tg\,\vartheta''_2 = -3a - \sqrt{9a^2+2}$$

Die beiden Teile der Kurve haben also für $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ ein Minimum resp. Maximum. Der weitere Verlauf von $\varphi = \pi$ bis $\varphi = 2\pi$ ist analog dem ersteren von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi$. Für einen Wert von φ ist immer ϑ_1 des einen Kurventeiles gleich und entgegengesetzt dem Werte von ϑ_2 des anderen Teiles für $(\varphi + \pi)$, so dass in der That die Kurven, wie vorher ausgesprochen, symmetrisch in Bezug auf den Mittelpunkt der Kugel liegen.

Bildet man nun den zweiten Differentialquotienten $\frac{d^2\vartheta}{d\varphi^2}$, so ergibt sich hierfür der Wert

$$\frac{d^2\vartheta}{d\varphi^2} = \frac{(3a - tg\,\vartheta\cos\varphi)\,tg\,\vartheta\cos^2\vartheta}{3a\sin\varphi\cos\varphi - 6\sin\varphi\cos\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta\,tg\,\vartheta + 2\,tg^2\vartheta\sin\vartheta\cos\vartheta}$$

Da nun ϑ nie $= 0$ oder $= \frac{\pi}{2}$ werden kann, so kann $\frac{d^2\vartheta}{d\varphi^2}$ nur verschwinden, wenn

$$3a - tg\,\vartheta\cos\varphi = 0$$

oder für $tg\,\vartheta$ seinen Wert in φ eingesetzt

$$3a - \cos\varphi(3a\cos\varphi \pm \sqrt{9a^2 + 2}) = 0$$

woraus sich ergibt

$$\cos\varphi = \pm\frac{3a}{\sqrt{2(1 + 9a^2)}}$$

d. h. jeder Teil der Kurve hat zwei Inflexionspunkte, die symmetrisch zum Meridian $\varphi = 0$ liegen. Die Kurve hat somit etwa eine Gestalt, wie sie Figur 9 zeigt.

Lässt man nun wieder a einen Parameter vorstellen und zunächst nur positive Werte durchlaufen, so erhält man eine einfach unendliche Kurvenschaar, von der jedes einzelne Individuum aus zwei getrennten, auf je einer Halbkugel verlaufenden und in sich geschlossenen Teilen besteht. Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und $= \frac{3\pi}{2}$ ist $tg\,\vartheta$ unabhängig von a, d. h. alle Kurven der ganzen Schaar gehen in der oberen und unteren Halbkugel durch je zwei feste Punkte des Meridians $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Für negative Werte von a gelten genau dieselben Betrachtungen, nur werden die in diesem Falle auftretenden Kurven eine in Bezug auf den Meridian $\varphi = \frac{\pi}{2}$ symmetrische Lage zu den vorigen einnehmen.

2) $m_1 = 0 \quad m_2 = 2.$

In diesem zweiten Falle für $n = 2$ lautet die zu diskutierende Gleichung

$$\frac{3}{2}\left(\cos^2\vartheta - \frac{1}{3}\right) + 3a\cos 2\varphi\sin^2\vartheta = 0$$

indem wieder für $P^2(\cos\vartheta)$ und seine zweite Ableitung ihre Werte eingetreten sind. Diese Gleichung geht nach Division mit $\sin^2\vartheta$ über in

$$2 - tg^2\vartheta(1 - 6a\cos 2\varphi) = 0$$

woraus sich ergibt

$$tg\vartheta = \pm\sqrt{\frac{2}{1-6a\cos 2\varphi}}$$

Hieraus ersieht man zunächst, dass im allgemeinen zu einem Werte von φ zwei Werte von ϑ gehören, deren Tangenten entgegengesetzt gleich sind, so dass sich die beiden Winkel zu 180^0 ergänzen. Die Kurve wird daher, wie eine erste Betrachtung zeigt, aus zwei getrennten Teilen bestehen.

Aus dem Ausdruck für $tg\,\vartheta$ geht ferner hervor, dass ϑ nur so lange reell sein kann als

$$6a\cos 2\varphi \leqq 1$$

ist. Aus diesem Grunde lassen sich bei der weiteren Diskussion direkt drei Fälle unterscheiden, je nachdem $a \lesseqgtr \frac{1}{6}$ ist.

I. $a < \frac{1}{6}$

Unter der Voraussetzung $a < \frac{1}{6}$ ist $6a\cos 2\varphi$ immer kleiner als 1 und kann den Wert 1 selbst nie erreichen. Für jeden Wert von φ wird es daher zwei Werte von ϑ geben und die Kurve aus zwei in Bezug auf den Aequator symetrischen getrennten Teilen bestehen. Bildet man, um einen weiteren Ueberblick über den Verlauf der Kurve zu bekommen, den ersten Differentialquotienten von ϑ nach φ, so ergibt sich

$$\frac{d\vartheta}{d\varphi} = -6\sqrt{2}\,a\,\frac{\sin 2\varphi}{(3-6a\cos 2\varphi)\sqrt{1-6a\cos 2\varphi}}$$

Da nun der Nenner der rechten Seite niemals unendlich wird, so kann $\frac{d\vartheta}{d\varphi}$ nur verschwinden, wenn der Zähler verschwindet, d. h. wenn

$$\sin 2\varphi = 0$$

ist. An den Stellen $\varphi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ besitzt die Kurve also Maxima oder Minima. Lässt man aber φ alle vielfachen von $\frac{\pi}{4}$ durchlaufen, so zeigt sich, dass für $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ $tg\,\vartheta$ seinen grössten Wert $\pm\sqrt{\frac{2}{1-6a}}$, dagegen für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ seinen kleinsten Wert

$\pm\sqrt{\frac{2}{1+6a}}$ annimmt. In den Punkten $\varphi = 0, \pi$ wird die Kurve daher zwei Minima und in den Punkten $\varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ zwei Maxima aufweisen. Dass die Kurve ausserdem eine geschlossene ist, ersieht man leicht daraus, dass $tg\vartheta$ für $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$ denselben Wert annimmt. Um den weiteren Verlauf der Kurven zwischen einem Maximum und dem darauf folgenden Minimum zu erfahren, bilde man den zweiten Differentialquotienten

$$\frac{d^2\vartheta}{d\varphi^2} = -12\sqrt{2}\,a$$

$$\frac{\cos 2\varphi(3-6a\cos 2\varphi)(1-6a\cos 2\varphi)-3a\sin^2 2\varphi\{2(1-6a\cos 2\varphi)+(3-6a\cos 2\varphi)\}}{(3-6a\cos 2\varphi)^3(1-6a\cos 2\varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

Hier kann wiederum der Nenner der rechten Seite nicht unendlich werden, mithin $\frac{d^2\vartheta}{d\varphi^2}$ nur verschwinden, wenn

$$\cos 2\varphi(3-6a\cos 2\varphi)(1-6a\cos 2\varphi)-3a\sin^2 2\varphi\{2(1-6a\cos 2\varphi)+(3-6a\cos 2\varphi)\} = 0$$

Ersetzt man hierin $\sin^2 2\varphi$ durch $1-\cos^2 2\varphi$ und substituiert für $\cos 2\varphi$ die Grösse x, so geht diese Gleichung nach Zusammenfassung gleich hoher Potenzen von x über in

$$x^3 + \frac{1}{2a}x^2 - \frac{1+18a^2}{6a^2}x + \frac{5}{6a} = 0$$

Macht man hierin die Substitution

$$x = y - \frac{1}{6a}$$

so erhält man als Gleichung in y

$$y^3 - \frac{1+12a^2}{4a^2}y + \frac{1+36a^2}{27a^3} = 0$$

Die Diskriminante dieser kubischen Gleichung zeigt, dass letztere drei reelle Wurzeln hat. Berechnet man diese drei Wurzeln und bildet sich hieraus die ihnen entsprechenden Werte von x, so ersieht man, dass einer derselben grösser als $+1$, ein anderer kleiner als -1 ist und der dritte nur dem Interwall von -1 bis $+1$ angehört. Die den beiden

ersten Wurzeln $x = \cos 2\varphi$ zugehörigen Winkel sind also imaginär und fallen aus der Betrachtung heraus, die dritte Wurzel dagegen liefert einen reellen Winkel φ, so dass also die zu diskutierende Kurve zwischen einem Maximum und dem darauf folgenden Minimum einen Wendepunkt hat. Die Kurve wird also einen in Fig. X. angedeuteten Verlauf haben.

II. $a > \frac{1}{6}$

In diesem Falle kann

$$6a \cos 2\varphi = 1$$

werden, $tg\,\vartheta$ also unendlich gross und Winkel $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. Dies geschieht, sobald $\cos 2\varphi = \frac{1}{6a}$ geworden ist. Wächst $\cos 2\varphi$ über diese Grenze hinaus, wird also $\cos 2\varphi > \frac{1}{6a}$, dann wird $tg\,\vartheta$ imaginär und die Kurve hat für solche Winkel φ keine reellen Punkte mehr. Die Kurve wird sich also nicht mehr wie im ersten Falle in gewissen Abständen um die Pole der Kugel herumziehen, sondern diese ganz ausschliessen und in zwei diametral gegenüberliegenden Kugelzweiecken verlaufen. Aus dem ersten Differentialquotienten

$$\frac{d\vartheta}{d\varphi} = -6\sqrt{2}\,a \frac{\sin 2\varphi}{(3 - 6a\cos 2\varphi)\sqrt{1 - 6a\cos 2\varphi}}$$

ersieht man, dass $\frac{d\vartheta}{d\varphi}$ für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ verschwindet. In diesen Punkten nimmt aber $tg\,\vartheta$ seinen kleinsten Wert an, der bedingt ist durch die Gleichung

$$tg\,\vartheta = \pm\sqrt{\frac{2}{1 + 6a}}$$

Die Kurve hat also hier dem positiven und negativen Zeichen entsprechend bezüglich zwei Maxima und Minima. Für den Grenzwinkel $\cos 2\varphi = \frac{1}{6a}$ wird $\frac{d\vartheta}{d\varphi}$ unendlich gross, und die Kurve berührt den diesem Winkel entsprechenden Meridian. Betrachtet man noch, um die Kurve auf Wendepunkte zu untersuchen, den zweiten Differentialquotienten, so ergibt sich, dass die aus diesem abgeleitete kubische Gleichung nur eine reelle Wurzel hat, mithin nur einen reellen Winkel φ liefert. Dieser einem Wendepunkt entsprechende Winkel φ liegt jedoch in dem Intervalle, für welches keine reellen Winkel ϑ existieren, so dass also die



Kurve in ihrem reellen Verlauf keinen Wendepunkt besitzt, sondern den in Fig. XI. angegebenen Verlauf hat.

III. $a = \frac{1}{6}$

Während jeder der beiden soeben betrachteten Fällen bei variablem a eine einfach unendliche Kurvenschaar lieferte, ergibt der nunmehr noch zu betrachtende Fall nur eine einzige Kurve, die man als Uebergangskurve der Kurven der ersten Schaar zu den Kurven der zweiten Schaar ansehen kann. Die zu diskutierende Gleichung lautet hier

$$tg\,\vartheta = \pm\sqrt{\frac{2}{1 - \cos 2\varphi}}$$

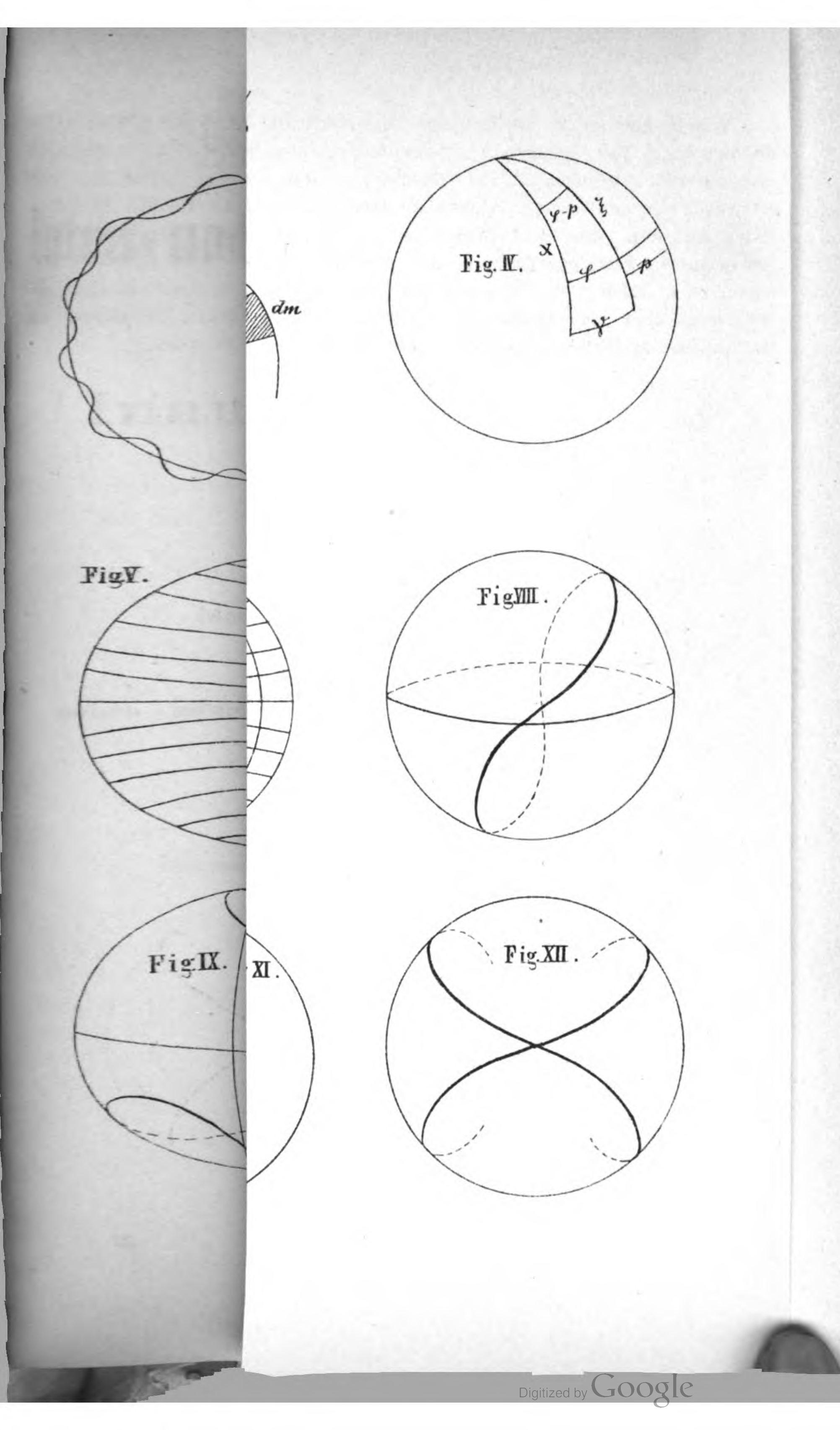
Da für alle reellen Winkel φ die Funktion $\cos 2\varphi$ niemals grösser als $+1$ werden kann, so wird der Ausdruck unter der Quadratwurzel auch immer reell bleiben, so dass im allgemeinen einem Werte von φ zwei Werte von ϑ entsprechen. Die Kurve wird deshalb wieder aus zwei einander entsprechenden Teilen bestehen. Diese beiden Teilen werden jedoch nicht wie in den zwei vorhergehenden Fällen gänzlich getrennt verlaufen, denn für $\varphi = 0$ oder $\varphi = \pi$ wird $tg\,\vartheta$ unendlich gross, die beiden Werte von ϑ fallen daher zusammen, und die beiden Kurvenzweige kreuzen sich in diesen beiden Punkten des Aequators. Lässt man φ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ wachsen, so fällt ϑ von $\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{\pi}{4}$, da für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ die Funktion $tg\,\vartheta$ den Wert ± 1 erreicht. Dieser Wert ist zugleich der kleinste Wert, den $tg\,\vartheta$ annehmen kann. Da es diesen aber in den Punkten $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ erreicht, so hat die Kurve in diesen Punkten je nach dem positiven oder negativen Zeichen der Quadratwurzel zwei Maxima resp. zwei Minima. Die die Wendepunkte ergebende kubische Gleichung der beiden anderen Fälle reduziert sich hier auf die einfache Form

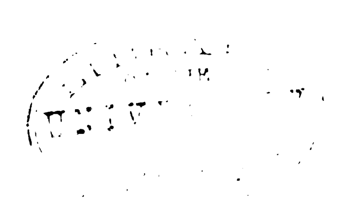
$$x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = 0$$

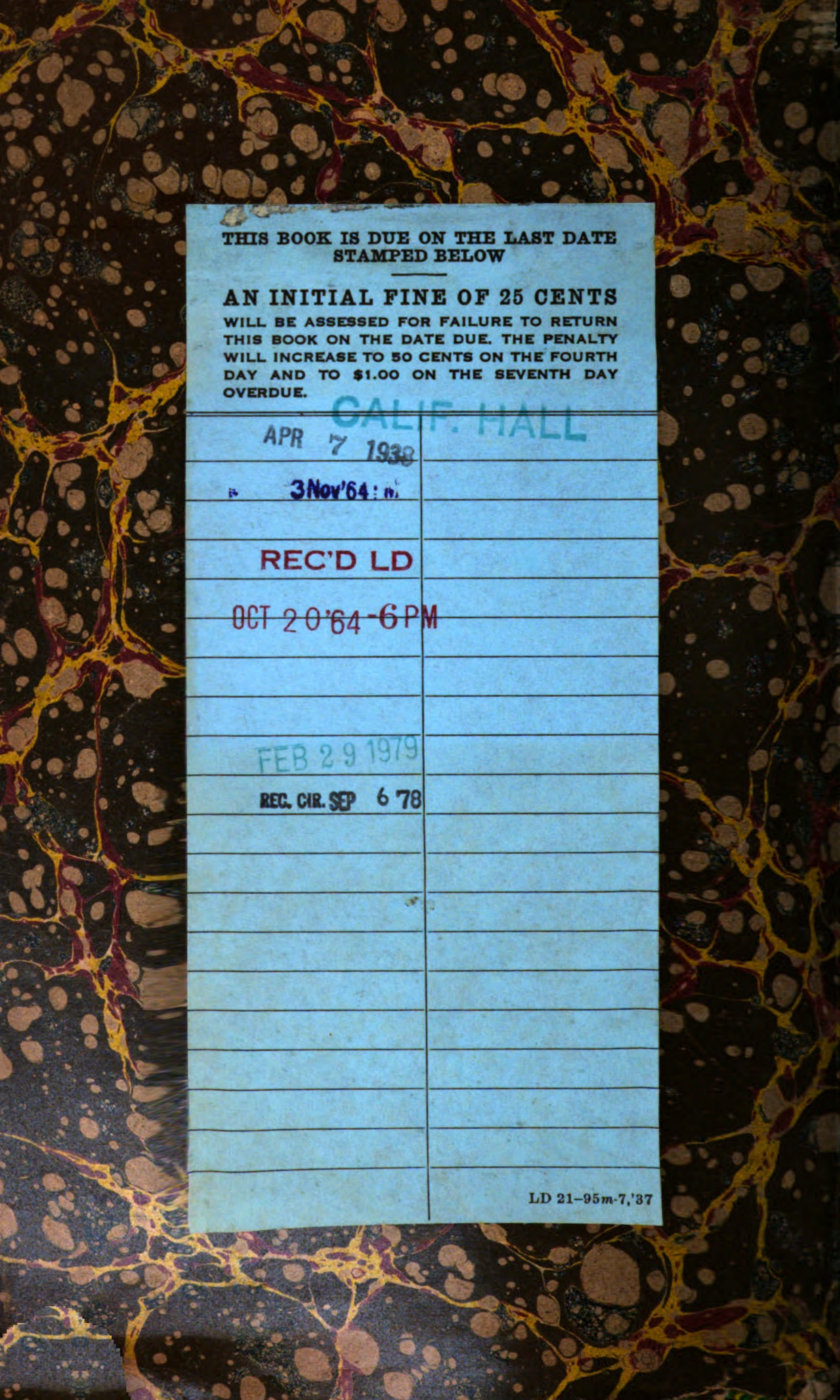
und hat die Wurzel -5 und die Doppelwurzel $+1$. Da aber zu $\cos 2\varphi = -5$ kein reeller Winkel φ gehören kann, so ergibt sich hieraus, dass die Kurve in den Punkten des Aequators, in denen sich die beiden Kurvenzweige kreuzen, je zwei Wendepunkte hat. Um den Verlauf der Kurve übersichtlicher darzustellen, ist in Fig. XII. der Nullmeridian in die Mitte der vorderen Halbkugel verlegt und der auf der hinteren Halbkugel verlaufende Teil der Kurve nur teilweise angedeutet worden.

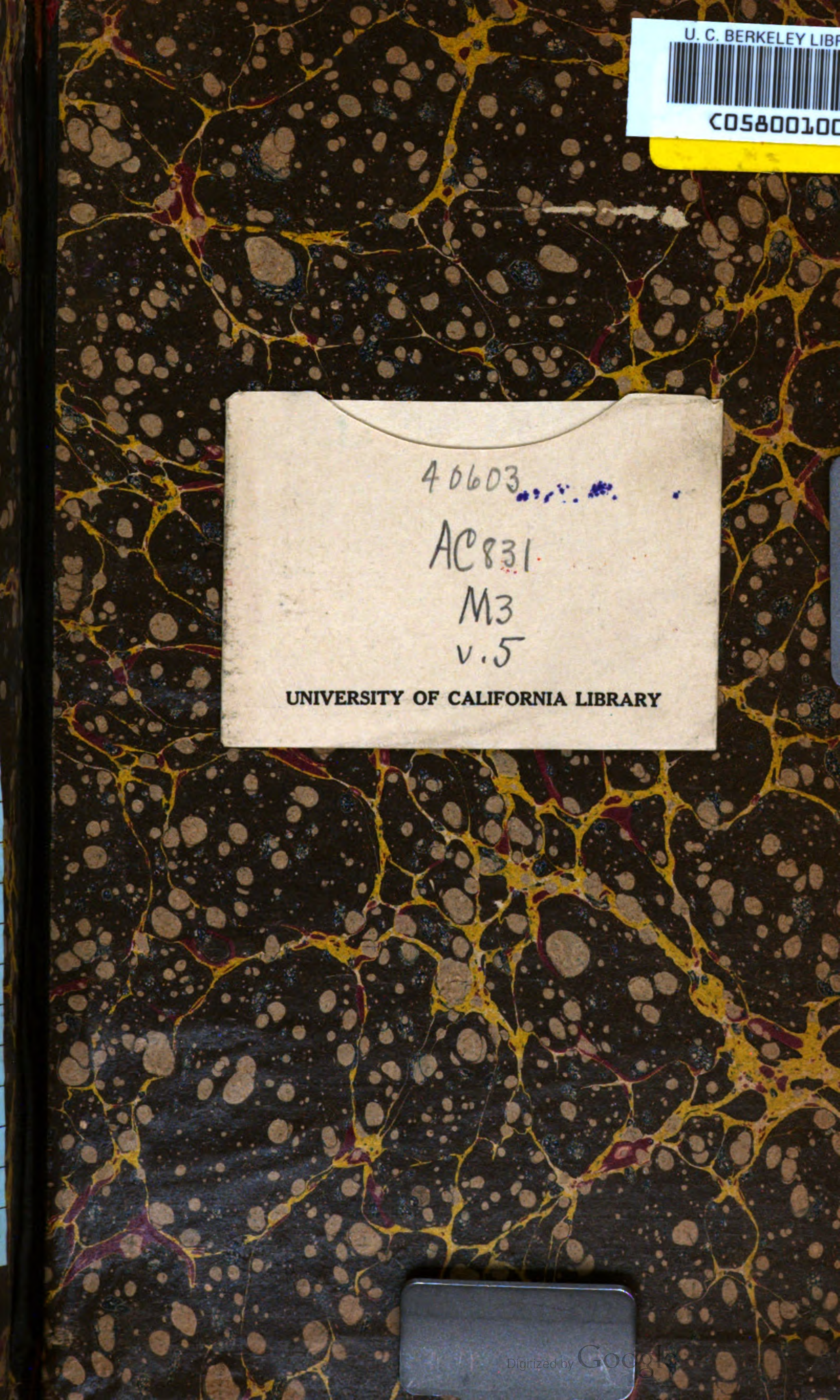
Wie es hier in der vorliegenden Diskussion für ein und zwei Glieder der Reihe (40) geschehen ist, könnte man nun fortfahren und noch mehrere Glieder dieser Reihe beibehalten. Es würden alsdann mit wachsenden n und m immer kompliziertere Kurvenschaaren als Knotenlinien auftreten. Alle diese Kurven haben jedoch dieselben Eigenschaften, indem sie die Kugeloberfläche in eine bestimmte Anzahl von Teilen zerlegen, von denen sich die einen bei den Schwingungen der Kugel abwechselnd über die anderen unter der Gleichgewichtslage befinden, da ja eine inkompressible Flüssigkeitsmasse vorausgesetzt wurde.




dm
Fig. IV.
φ-p
ξ
x
φ
p
γ
Fig.V.
Fig.VIII.
Fig.IX.
XI.
Fig.XII.






U. C. BERKELEY LIBR
C05800100
40603
AC831
M3
v.5
UNIVERSITY OF CALIFORNIA LIBRARY
Digitized by Google

